

# 基于四维协变量的光栅干涉系统频移理论研究



林子超<sup>1,2,3,4,5</sup>, 姚玉林<sup>1,2,3,4,5</sup>, 周通<sup>1,2,3,4,5</sup>, 薛栋柏<sup>1,2,3,4,5</sup>,  
顾振杰<sup>1,2,3,4,5</sup>, 邓晓<sup>1,2,3,4,5\*</sup>, 程鑫彬<sup>1,2,3,4,5</sup>, 李同保<sup>1,2,3,4,5</sup>

1. 同济大学精密光学工程技术研究所, 上海 200092
2. 先进微结构材料教育部重点实验室, 上海 200092
3. 上海市数字光学前沿科学研究基地, 上海 200092
4. 上海市全光谱高性能光学薄膜器件与应用专业技术服务平台, 上海 200092
5. 同济大学物理科学与工程学院, 上海 200092

**【摘要】** 光栅干涉系统中的装配与角度调试误差是探测光发生几何错位、偏离探测器感光中心的直接原因。为厘清探测光综合姿态误差对干涉相位和位移测量结果的影响, 本文基于狭义相对论波矢量的四维表达形式, 将光频率和光波矢与光栅方程直接关联, 构建了以任意角度入射、光栅沿任意方向运动的多普勒频移理论体系, 论证了在不同光栅入射角度下, 同级次衍射光频移关系具有一致性的物理特征。通过激光、光栅干涉系统之间物理图像的对比, 阐明了即使系统光几何路径不随运动改变, 也仍产生相位变化的原因是光栅表面的特殊波矢调制关系。结论表明, 光栅干涉系统在探测光存在综合姿态误差情况下位移转化关系仍保持不变, 光栅周期方向的偏转是系统几何测量误差的关键来源。最后, 为初判某一系统的测量性能指标, 文中给出了一种能够快速判断其位移测量原始分辨率的方法。由于本文的频移理论从物理底层逻辑出发, 因此相关结论具有普适性, 这不仅对所有光栅干涉系统的原理分析具有指导作用, 同时还对各种先进系统中的几何测量误差分析具有重要参考价值。

**【关键词】** 光栅干涉系统; 四维协变量; 光栅多普勒效应; 姿态误差; 测量分辨率

**DOI:** 10.12338/j.issn.2096-9015.2022.0248

**【引用本文】** 林子超, 姚玉林, 周通, 等. 基于四维协变量的光栅干涉系统频移理论研究 [J]. 计量科学与技术, 2022, 66(11): 3-11, 26.

## Research on Frequency Shift Theory of Grating Interference Systems Based on 4D Covariates

LIN Zichao<sup>1,2,3,4,5</sup>, YAO Yulin<sup>1,2,3,4,5</sup>, ZHOU Tong<sup>1,2,3,4,5</sup>, XUE Dongbai<sup>1,2,3,4,5</sup>, GU Zhenjie<sup>1,2,3,4,5</sup>,  
DENG Xiao<sup>1,2,3,4,5</sup>, CHENG Xinbin<sup>1,2,3,4,5</sup>, LI Tongbao<sup>1,2,3,4,5</sup>

1. Institute of Precision Optical Engineering, Shanghai 200092, China
  2. MOE Key Laboratory of Advanced Micro-Structured Materials, Shanghai 200092, China
  3. Shanghai Frontiers Science Center of Digital Optics, Shanghai 200092, China
  4. Shanghai Professional Technical Service Platform for Full-Spectrum and High-Performance Optical Thin Film Devices and Applications, Shanghai 200092, China
  5. School of Physics Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China
- Corresponding author: DENG Xiao, Email: 18135@tongji.edu.cn

**【Abstract】** The assembly and angular commissioning errors in the grating interference system are the direct causes of the geometric misalignment of the detection light and its deviation from the detector sensing center. To clarify the influence of the integrated attitude error of the detection light on the interferometric phase and displacement measurement results, based

**基金项目:** 国家重点研发计划(2022YFF0605502); 国家自然科学基金面上项目(62075165); 上海张江国家自主创新示范区专项发展资金重大项目(ZJ2021-ZD-008)。

**作者简介:** 林子超(1998-), 同济大学精密光学工程技术研究所在读博士生, 研究方向: 精密位移测量技术、原子光刻技术等, 邮箱: zichao@tongji.edu.cn; 通讯作者: 邓晓(1988-), 同济大学精密光学工程技术研究所副教授, 研究方向: 纳米光栅标准物质、线宽标准物质、超精密测量及校准技术等, 邮箱: 18135@tongji.edu.cn。

on the 4D expression of the wave vector of special relativity, this paper directly relates the optical frequency and optical wave vector to the grating equation, constructs a Doppler frequency shift theory system with any arbitrary angle of incidence and grating motion along any direction, and demonstrates the physical characteristics that the frequency shift relationship of diffraction light at the same level is consistent under different grating incidence angles. By comparing the physical images between laser and grating interference systems, it is clarified that even if the optical geometric path of the system does not change with the motion, the reason for the phase change is the special wave vector modulation relationship on the grating surface. The conclusion shows that the grating interference system maintains the displacement transformation relationship in the presence of integrated attitude error of the detection light, and the deflection of the grating period direction is the key source of the geometric measurement error of the system. To preliminarily determine the measurement performance index of a certain system, a method that can quickly determine the original resolution of displacement measurement is given in this paper. Since the frequency shift theory in this paper starts from the underlying logic of physics, the relevant conclusions are universal, which not only guides the principle analysis of all grating interference systems, but also has an important reference for the analysis of geometric measurement errors in various advanced systems.

**【Key words】** grating interference system, 4D covariates, grating Doppler effect, attitude error, measurement resolution

## 0 引言

长度的精确计量是实现器件精准加工、确保产品质量、提升产业经济价值的关键基础<sup>[1-3]</sup>。为解决先进制造业不断增长的需求,一个共同的发展趋势是:测量被直接整合到加工生产中<sup>[4-5]</sup>,系统利用来自多个传感器的测量数据监控整个制造流程,并以闭环的方式不断调整工艺参数,实现对加工公差的在线修正<sup>[6]</sup>。其中,以激光干涉仪和光栅干涉仪为代表的光学传感器,由于具备非接触和高速、高分辨率的特点,已被广泛地应用于半导体制造、晶圆光刻等领域<sup>[7-8]</sup>。有关这两类干涉系统的比较已有详细记载<sup>[9]</sup>,这里值得关注的是,激光干涉仪对空气折射率的依赖性是其精度进一步发展的主要因素<sup>[10]</sup>。相关分析表明,即使是在极为严苛的环境条件下,仍有80%的光刻机定位误差来源于空气折射率的波动<sup>[11]</sup>。作为替代解决方案,以光栅栅距作为测量基准的光栅干涉仪,由于具备稳定性好、重复定位精度高、结构紧凑的特点,被荷兰ASML公司应用于最新一代光刻机的晶圆定位系统中<sup>[12]</sup>。不仅如此,其在光刻定位系统以外的市场占比也呈现持续、明显的上升趋势<sup>[13-14]</sup>,这表明光栅式超精密测量技术满足前沿纳米科技所需,具有更为广阔的发展和应用前景。

为提升光栅干涉仪的应用适配性,这对系统的光学结构设计提出了诸多要求,可以将其主要概括为<sup>[15]</sup>:读数头不仅需要具备在复杂环境下的结构稳定性,还需具备用于抵抗意外倾斜的光路对准容差,同时还应尽可能设计更为紧凑的小型化结构,以满足各种应用场景的装配条件。其中,由于具备对准

容差的光学结构可以有效弱化探测光错位造成的干涉对比度下降问题,近年来研究人员对此已开展了大量研究。HSIEH等<sup>[16]</sup>基于光学剪切干涉仪的原理,利用扩束聚焦的方法提高了探测光的空间重叠性;CHANG等<sup>[17]</sup>采用光栅的二次衍射结构,使得探测光在光栅发生意外偏移时仍保持平行;WEI等<sup>[18]</sup>采用光纤传输结构减少了由错位误差和位置偏差导致的角度不匹配问题;FAN等<sup>[19]</sup>利用光栅 Littrow 结构的自准直特性设计了高对准容差的结构,并由 KAO 等<sup>[20]</sup>对该结构进行了详细的几何原理分析。

虽然上述光学结构对提升对准容差是有效的,然而在实际测量过程中,很难保证光栅不在未测量的自由度上移动或者旋转,也难以保证读数头在内部调试和装配过程中不存在角度误差。这不仅导致光栅周期方向发生相对旋转,且存在入射方位角时,还将从光栅面内衍射演变为锥面衍射情形,这会直接引起探测光发生几何错位,并偏离探测器的感光中心。事实上,尽管此时的干涉对比度较低,但只要保证光束重叠部分仍在光电探测器的接收面积范围内,总能够对产生的干涉信号进行处理和读数。然而这其中存在以下共性问题:1)存在几何错位和中心偏移的探测光是否会引入额外的干涉相位,此时位移的测量结果是否可靠;2)角度调试误差致使光栅由面内入射变为锥面衍射,此时基于面内光栅方程推导的位移转换关系是否仍然适用;3)光栅周期方向的转动是否会造成系统位移测量自由度方向变化,光栅沿着测量自由度外移动会对干涉相位产生何种影响等。

为解决上述问题,必须深入研究光栅衍射光发

生频移的物理本质。在早期的研究中,已揭示了沿着光栅周期方向移动会产生  $2\pi$  相移的原因<sup>[21]</sup>,而在绝多数光栅干涉系统的原理分析中,均缺少对任意条件入射、光栅沿任意方向运动的衍射光频移特征的详细讨论。考虑到狭义相对论中波矢量的四维表达形式具备将光波矢和光频率直接相联系的自然优势,不仅可以描述包括锥面衍射在内的任意角度光栅入射情况,还可以通过四维洛伦兹矩阵模拟光栅沿任意方向运动的情形。此外,四维波矢量还能够完美适配光栅方程所描述的波矢变换本质,第四维度描述的光频信息利用协变关系又使其成为天然的衍射光频移分析载体。所以,基于四维协变量构建光栅频移理论体系是切实可行的。

因此,为分析探测光发生几何错位以及偏离探测器感光中心对光栅干涉系统测量结果的影响,本文将通过四维协变关系构建可用于任意初始设置条件的光栅频移理论框架,并基于推导结果阐明探测光在存在综合姿态误差下的频移特性,同时给出光栅干涉仪的诸多系统固有特征。

## 1 原理

### 1.1 沿任意方向运动的四维洛伦兹变换

将物体固定在坐标原点,并令其沿指向任意方向的  $x'$  轴运动,构建运动坐标系  $x''y''z''$ 。构造方法如下:如图 1 所示,在右手系中,  $xyz$  坐标系首先绕  $z$  轴逆时针旋转  $\varphi$ ,得  $x'y'z'$  坐标系,再绕  $y'$  轴顺时针旋转  $\theta$ ,得  $x''y''z''$  坐标系。此时,仅通过两次旋转得到了指向任意方向的  $x''$  轴。

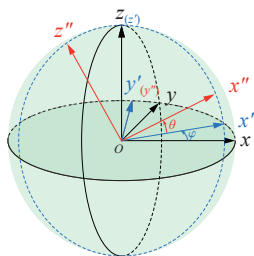


图 1 沿  $x''$  运动的坐标旋转示意图

Fig.1 Schematic diagram of coordinate rotation along the  $x''$  axis

以  $xyz$  坐标系为参考系,设物体沿  $x'$  轴运动的速度为  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ 。为使表达更简洁,取中间量  $\vec{\beta}_j = \vec{v}_j/c$ ,其中  $c$  为光速,  $j$  表示分量。根据图 1 所示的角度关系,  $\vec{\beta}$  的各个分量可以表示为式(1)。

$$\begin{cases} \beta_x = \frac{v_x}{c} = \beta \cos\theta \cos\varphi \\ \beta_y = \frac{v_y}{c} = \beta \cos\theta \sin\varphi \\ \beta_z = \frac{v_z}{c} = \beta \sin\theta \end{cases} \quad (1)$$

设坐标的四维表达形式<sup>[22]</sup>为  $(x, y, z, ict)$ ,则前述坐标轴旋转变换及其逆变换的矩阵可以表示为式(2)和式(3)。

$$R_+ = \begin{bmatrix} \frac{\beta_x}{\beta} & \frac{\beta_y}{\beta} & \frac{\beta_z}{\beta} & 0 \\ \frac{-\beta_y}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\beta_x}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta_x \beta_z}{\beta \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{-\beta_y \beta_z}{\beta \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_- = \begin{bmatrix} \frac{\beta_x}{\beta} & \frac{-\beta_y}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{-\beta_x \beta_z}{\beta \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & 0 \\ \frac{\beta_y}{\beta} & \frac{\beta_x}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{-\beta_y \beta_z}{\beta \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & 0 \\ \frac{\beta_z}{\beta} & 0 & \frac{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

在  $x''y''z''$  坐标系下,坐标的四维表达形式为  $(x, y, z, ict)$ ,根据狭义相对论,坐标系沿  $x$  轴运动的四维洛伦兹变换矩阵如式(4)。

$$L_x = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $\beta = \frac{v}{c}$ ;  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ ;  $v$  仍为物体沿  $x$  轴运动的速度大小。

在  $xyz$  坐标系下,沿  $x$  轴运动的四维洛伦兹变换矩阵可表示为  $L = R_- L_x R_+$ ,因此可得式(5)。

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\gamma\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & i\gamma\beta_x \\ \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{\beta_x^2 + \gamma\beta_y^2 + \beta_z^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & i\gamma\beta_y \\ \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & \frac{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \gamma\beta_z^2}{\beta^2} & i\gamma\beta_z \\ -i\gamma\beta_x & -i\gamma\beta_y & -i\gamma\beta_z & \gamma \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 1.2 光栅沿任意方向运动引入的频移

光源和光栅之间的相对运动在本质上可以认为是入射光源参考系  $K$  和光栅参考系  $K'$  之间的相对运动, 这一过程直接致使非零级衍射光相对入射光之间存在与运动量相关的光频移(相移), 而此偏移量的数值大小与相对运动存在函数关系。光栅干涉仪正是利用了这一特性, 将发生频移的衍射光作为相对位移的“信息载体”, 再通过衍射光干涉将该位移信息进一步载入至干涉光强度的变化之中, 观测者通过提取干涉光强变化的相位值, 反解其中包含的相对位移信息, 最终实现对长度的精密测量。

为明晰上述物理过程的产生机理以及对光栅入射条件的要求, 首先说明光栅干涉式位移测量系统各部分在参考系中的定义。在实际的测量系统中, 光栅固定在待测运动平台之上, 二者相对静止, 且一般需满足光栅矢量方向与待测运动方向相平行的装配关系。设二者共同位于动参考系  $K'$ , 而观测者和光源  $S$  都位于静参考系  $K$ 。因此, 在上述参考系的设定条件下, 干涉光强的变化是观测者在  $K$  坐标系观测的结果。为便于讨论, 不妨假设光栅和待测运动平台的沿任意方向的速度为  $-\vec{v}$ , 与此相对, 在  $K$  参考系保持静止的入射光源  $S$  此时相对光栅的速度为  $+\vec{v}$ 。

$$k_{\mu_{in}} = \begin{bmatrix} k_{x_{in}} \\ k_{y_{in}} \\ k_{z_{in}} \\ i\frac{\omega_{in}}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_1\gamma\beta_x}{c} + \frac{k'_x(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} + \frac{k'_z(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} + \frac{k'_x(\gamma\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2)}{\beta^2} \\ -\frac{\omega_1\gamma\beta_y}{c} + \frac{k'_x(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} + \frac{k'_z(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} + \frac{k'_y(\beta_x^2 + \gamma\beta_y^2 + \beta_z^2)}{\beta^2} \\ -\frac{\omega_1\gamma\beta_z}{c} + \frac{k'_x(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} + \frac{k'_y(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} + \frac{k'_z(\beta_x^2 + \beta_y^2 + \gamma\beta_z^2)}{\beta^2} \\ \frac{i\omega_1\gamma}{c} - ik'_x\gamma\beta_x - ik'_y\gamma\beta_y - ik'_z\gamma\beta_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

可以从矩阵前三行看出: 由于相对论效应, 观测者在  $K$  参考系设置的入射波矢量  $(k_{x_{in}}, k_{y_{in}}, k_{z_{in}})$  与光栅在  $K'$  参考系下感知到的入射波矢量  $(k'_x, k'_y, k'_z)$  之间存在极为微小的方向差别, 即光行差效应<sup>[22]</sup>。但由于  $\gamma \rightarrow 1$ , 在后续的推导中均默认不同参考系下的光波

以下将根据四维波矢量  $k_{\mu} = (k_x, k_y, k_z, i\omega/c)$  是协变量这一物理属性, 推导光栅沿任意方向运动频移变化的严格解析解。图 2 中  $G$  为二维光栅,  $x$  轴和  $y$  轴方向分别是光栅矢量方向,  $d_x$  和  $d_y$  分别是光栅在两个方向的周期大小;  $S_1$  代表入射光源,  $S_2$  为光栅衍射光源,  $\omega$  和  $k$  分别为光频率和空气环境中的光波矢。

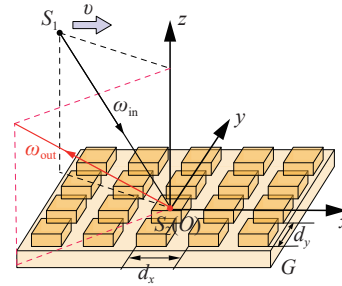


图 2 光栅与入射光源相对运动示意图  
Fig.2 Schematic diagram of the relative motion between the grating and the incident light source

下面阐述衍射光发生频移的物理过程: 1) 在光源  $K$  参考系下, 光源  $S_1$  以  $k_{\mu_{in}} = (k_{x_{in}}, k_{y_{in}}, k_{z_{in}}, i\omega_{in}/c)$  入射至光栅  $G$  发生衍射,  $S_1$  相对  $G$  有  $+v$  的速度; 2) 在光栅  $K'$  参考系下, 由于存在相对运动,  $G$  感知到的入射光波矢量为  $k'_{\mu} = (k'_x, k'_y, k'_z, i\omega_1/c)$ , 该波矢满足  $K'$  参考系下的光栅方程, 发生衍射; 3) 由于光栅衍射, 在  $K'$  参考系下产生了一个新的光源  $S_2$ , 在  $K'$  参考系中  $S_2$  的波矢量为  $k_G = (k_{x_G}, k_{y_G}, k_{z_G}, i\omega_2/c)$ ,  $S_2$  与  $G$  保持相对静止; 4) 设由  $S_2$  发出的衍射光在  $K$  参考系下探测的波矢量为  $k_{\mu_{out}} = (k_{x_{out}}, k_{y_{out}}, k_{z_{out}}, i\omega_{out}/c)$ ,  $\omega_{out}$  为实验者的观测结果, 以下严格推导  $\omega_{out}$  的表达式。

在  $S_1$  所在  $K$  参考系下观测, 代入四维洛伦兹变换矩阵, 则  $k_{\mu_{in}} = L \cdot k'_{\mu}$ , 得式(6)。

矢方向相同。

因此, 对于式(6), 只关注矩阵的第四行, 可以反解得式(7)。

$$\omega_1 = \frac{\omega_{in}}{\gamma} + k'_x v_x + k'_y v_y + k'_z v_z \quad (7)$$



在  $k'_\mu$  的入射条件下, 入射光将根据  $K'$  参考系的光栅方程发生衍射, 被光栅分解为多个方向的衍射级次, 此时可以将光栅发出的衍射光理解为新光源  $S_2$ 。由于新光源  $S_2$  与光栅所在的  $K'$  参考系保持相对静止, 因此, 衍射光频率  $\omega_2$  与在  $K'$  参考系下感知到频率  $\omega_1$  大小相等。上述衍射过程可以用四维波矢条件下的光栅方程描述如式(8)。

$$k_G = \begin{bmatrix} k_{xG} \\ k_{yG} \\ k_{zG} \\ k_{\omega G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_x + m \frac{2\pi}{d_x} \\ k'_y + h \frac{2\pi}{d_y} \\ \sqrt{k'^2 - \left(k'_x + m \frac{2\pi}{d_x}\right)^2 - \left(k'_y + h \frac{2\pi}{d_y}\right)^2} \\ i \frac{\omega_1}{c} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中,  $k' = \sqrt{k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2}$ ;  $m$  和  $h$  分别是光栅在两个周期方向的衍射级次。

式(8)将入射波矢  $k'_\mu$  和衍射波矢  $k_G$  联系起来, 其中前三行与常规含义下的光栅方程并无本质差异, 而第四行补全了四维形式下光频率之间的关联, 是更为普遍的光栅方程。这里注意, 光栅方程和衍射波  $k_G$  均是在光栅  $K'$  参考系下讨论的结果, 而实际观测者位于  $K$  参考系, 为求得最终的观测结果, 仍需再次对其进行洛伦兹变换。不同的是, 新光源  $S_2$  与光栅运动速度相同, 而与光源  $S_1$  的方向相反, 此时洛伦兹变换矩阵应改写为  $L' = L_{(\beta_1 \rightarrow -\beta_1)}$ 。最终在  $K$  参考系下观测衍射光, 有  $k_{\mu out} = L' \cdot k_G$ , 可反解得到式(9)。

$$\omega_{out} = \gamma \left( \omega_1 - \frac{2\pi m}{d_x} v_x - \frac{2\pi h}{d_y} v_y - k'_x v_x - k'_y v_y - k_{zG} v_z \right) \quad (9)$$

将式(7)代入, 可得  $\omega_{out}$  的最终表达如式(10)。

$$\omega_{out} = \omega_{in} - \frac{2\pi m \gamma}{d_x} v_x - \frac{2\pi h \gamma}{d_y} v_y - (k_{zG} - k'_z) \gamma v_z \quad (10)$$

其中,  $\vec{v}$  是光源  $S_1$  的速度; 对时间  $t$  积分, 并令  $\vec{v}_G = -\vec{v}$ ,  $\vec{r}_G = -\vec{r}$ , 分别表示待测物体的速度和位移。可得最终相位和相移量如式(11)和式(12)。

$$\varphi_{out} = \varphi_{in} + \frac{2\pi m \gamma}{d_x} x_G + \frac{2\pi h \gamma}{d_y} y_G + (k_{zG} - k'_z) \gamma z_G \quad (11)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{out} - \varphi_{in} = \Delta\varphi_x + \Delta\varphi_y + \Delta\varphi_z \quad (12)$$

为更清晰地描述式(12)的物理含义, 现考虑更一般的情形, 假设光波  $\vec{k}_{in}$  入射至某一反射器件, 其

反射光波为  $\vec{k}_{out}$ , 求解其反射后的频率变化。设两个波矢量的基本形式仍为  $k_{\mu in} = (\vec{k}_{in}, i\omega_{in}/c)$  和  $k_{\mu out} = (\vec{k}_{out}, i\omega_{out}/c)$ , 采用上述相同的方法处理, 但过程中略过式(8)所述的光栅方程, 易得式(13)和式(14)。

$$\Delta\omega = \omega_{out} - \omega_{in} = \gamma (\vec{k}_{out} - \vec{k}_{in}) \cdot \vec{v}_G \quad (13)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{out} - \varphi_{in} = \gamma (\vec{k}_{out} - \vec{k}_{in}) \cdot \vec{r}_G \quad (14)$$

上式说明, 反射光和入射光之间的相移变化是相位因子和相对论效应的叠乘, 其乘积因子分别是  $\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}_G$  和相对论中的  $\gamma$  系数。前者具有很直观的物理几何意义, 表示两个坐标系相对平移引入的相移, 后者是四维波矢量协变性所导致的必然结果。这里  $\gamma = [1 - (v_G/c)^2]^{-1/2}$ ,  $v_G$  是反射器件相对光源的速度大小, 取级数展开得  $\gamma = 1 + v_G^2/2c^2 + O[v_G^4]$ , 由于  $c$  和  $v_G$  不在一个数量级, 所以一般情况下均可以取  $\gamma = 1$  进而忽略相对论效应, 只需考虑因  $\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}_G$  引入的相移, 至此已完整地通过波矢四维协变性的角度解释了光发生频移(或称之为光的多普勒效应)的物理本质。

而对于本文重点关注的光栅, 完全可以将其理解为一个特殊的反射器件。如图3所示, 它的特殊之处在于以下两点。

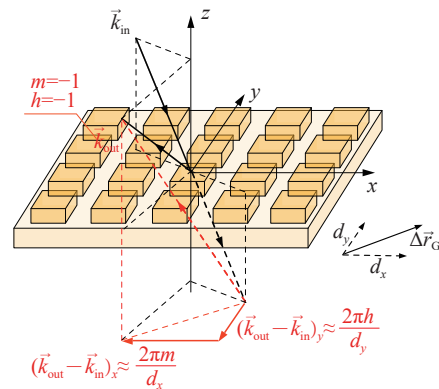


图3 光栅衍射过程的矢量分解示意图  
Fig.3 Schematic diagram of vector decomposition of the grating diffraction process

a. 该反射器件基于光栅方程将式(13)和(14)中  $\Delta\vec{k}$  的  $x$  和  $y$  分量替换为  $\frac{2\pi m}{d_x}$  和  $\frac{2\pi h}{d_y}$ , 这二者分别是  $\Delta\varphi$  在  $x$  方向和  $y$  方向的相移比例系数;

b. 由于光栅方程中的  $\Delta\vec{k}$  本身描述的是任意环境条件下的光波矢变化, 因此光栅衍射过程已天然将空气折射率变化考虑在内, 结果直接表现为相移

比例系数与空气折射率无关,即从频移原理上消除了环境折射率波动带来的干扰。

基于推导结果,还可以得到以下三点结论。

1) 当  $m = h = 0$  时, 代入式 (11), 此时  $\Delta\varphi_x = 0$ ,  $\Delta\varphi_y = 0$ , 这说明在周期表面运动的条件下, 光栅的零级衍射光并不能作为“信息载体”携带相对位移信息, 在光栅干涉系统中是无效的干扰光;

2) 若光栅仅在  $x$  方向有周期, 只需将相移系数中的  $d_j \rightarrow \infty$ , 即回归到一维光栅的表达结果;

3) 对于某一具有多方向周期结构的特殊反射器件, 当其沿表面运动时, 可以预期的是衍射光的相移总和为式 (15)。

$$\Delta\varphi = \gamma \Delta \vec{k} \cdot \vec{r}_G = \gamma \sum_{j=1}^n m_j \frac{2\pi}{d_j} s_j \quad (15)$$

式中,  $n$  为该器件在表面存在的周期方向个数;  $m_j$ 、 $d_j$ 、 $s_j$  分别是第  $j$  个周期方向的衍射级次、周期大小和相对位移量;  $\gamma$  为相对论因子。

## 2 干涉系统分析

### 2.1 光栅干涉系统位移测量过程的物理图像

基于前一小节严格证明的频移(相移)公式(13)和(14), 下文将通过与激光干涉系统的对比进一步阐明光栅干涉系统位移测量过程对应的物理图像。暂不考虑空气折射率变化造成的影响, 如图 4(a)所示的激光干涉系统, 其原理可以类比迈克尔逊干涉仪, 即测量回射镜运动引入的光程差, 将导致干涉光强发生变化。由于测量中必定伴随光几何路径长度的改变, 因此该原理的物理过程图像非常直观。

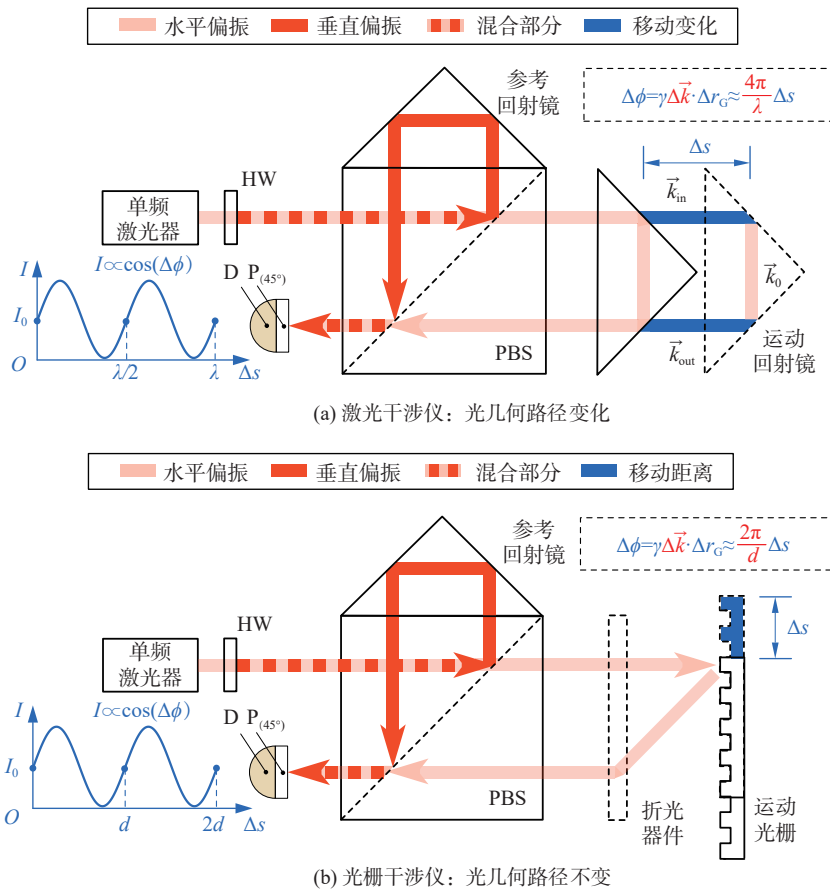


图 4 单频干涉位移系统测量原理的物理图像对比 [15, 23]

Fig.4 Physical image comparison of measurement principle of single frequency interference displacement system

然而本文讨论光栅系统虽利用了相同的干涉测量原理, 但其过程的几何图像却与激光干涉系统存在明显差异。以图 4(b)为例说明, 仍不考虑空气折射率的波动, 具体表现为: 当光栅在沿周期表面运动

的过程中, 入射光和衍射光路径的总几何长度是一固定值, 或表述为测量过程中光程差不变, 但此时仍可探测到干涉光在亮暗交替变化。这似乎与常规中光程差致使干涉强度变化的理解存在矛盾, 然而这

里产生认知偏差的关键点在于,仅以光路的几何长度发生变化来判断是否产生相移这一经验判据并非普适的,以下将基于 1.2 节的推导对此进行详细说明。

## 2.2 物理图像的讨论

根据 1.2 节已知由式(13)和式(14)表述的频移(相移)关系是普适的,并在数值上等于波矢量变化与位移矢量之间的内积。为了清楚展示物理图像的产生缘由,可以进一步将 $\Delta\varphi$ 向沿着光栅周期 $d_x$ 、 $d_y$ 和光栅法线这三个方向分解,其中光栅周期方向的相移比例系数 $\Delta\vec{k}_x$ 和 $\Delta\vec{k}_y$ 直接由光栅方程给出,在衍射级次 $m \neq 0$ 和 $h \neq 0$ 的情况下其值是非零常数,这说明沿着光栅表面运动将必然存在 $\Delta\varphi_x$ 和 $\Delta\varphi_y$ 。这里需要强调的是,虽然 $\Delta\varphi_x$ 和 $\Delta\varphi_y$ 的表达式在形式上仍满足 $\gamma\Delta\vec{k} \cdot \Delta\vec{r}_G$ ,但这部分对光程差并无贡献,由此即可说明仅以光路几何长度变化作为干涉系统中产生相移的判据是不足的。

而在图 4(a)所示的激光干涉系统中,当光入射至任意镜面,其出射和入射的波矢关系将受到反射定律的严苛约束,即波矢量在镜面表面和法线方向需分别满足 $\Delta\vec{k}_x = \Delta\vec{k}_y = 0$ 和 $\Delta\vec{k}_z = -2\vec{k}_{zn}$ 的关系,可以将此时的反射光等效为 1.2 节结论 1)中所述的零级衍射光( $m = 0, h = 0$ ),它并不携带与被测物之间的相对位移信息。这说明激光干涉系统天然缺少沿镜面表面运动的测量维度,是一种仅能测量法向位移分量的单轴测量系统,而法向分量又是造成光路几何长度变化的主导因素,因此激光干涉系统以光路长度变化作为产生相移的判据是可行的。需要补充的是,多次反射并不改变这一结果,对于图 4(a)中的回射镜整体,它满足式(16)所述关系。

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= (\vec{k}_0 - \vec{k}_{in}) \cdot \Delta\vec{r}_G + (\vec{k}_{out} - \vec{k}_0) \cdot \Delta\vec{r}_G \\ &= (\vec{k}_{out} - \vec{k}_{in}) \cdot \Delta\vec{r}_G \\ &= 2\vec{k}_{out} \cdot \Delta\vec{r}_G \end{aligned} \quad (16)$$

所以仍可将此整体类比为只能测量法向运动的反射镜面,因此前述激光干涉系统的结论不变。

综上,通过对比可以得到如下三个结论:

1) 由于光栅的分光作用,光栅干涉系统将额外产生沿周期方向的测量维度。

其中 $\Delta\varphi_x$ 和 $\Delta\varphi_y$ 的比例系数仅与光栅的核心特征参数 $d$ 和衍射级次相关,该相移量的物理几何图像可以被表述为 $\Delta\vec{k}_x$ ( $\Delta\vec{k}_y$ )矢径长度与对应方向

$\Delta\vec{r}_G$ 位矢长度的乘积之和,矢量分解图详见图 3。此外,当光栅进行法向运动时将同样产生 $\Delta\varphi_z$ ,利用式(8)可以方便证明其比例系数 $\Delta\vec{k}_z$ 将与激光波长、入射角度、光栅周期和衍射级次等多个参数耦合关联。光栅干涉系统的初衷是利用光栅特征参数作为测量基准。

2) 因此,为保证测量基准仅与光栅参数相关,光栅干涉系统一般不进行法向测量。

此外,还需要重点强调说明的是,式(11)和式(12)适用于光栅沿任意方向运动以及存在任意入射方位角的情形,即无论是何种光栅入射姿态和运动方向,只要满足光栅方程,其相移系数 $\Delta\vec{k}_x$ ( $\Delta\vec{k}_y$ )在衍射级次固定的条件下均不会发生变化。

3) 上述入射的任意性可以进一步归纳为:光栅干涉系统天然存在一定的对准容差,倘若入射光姿态发生偏离,与干涉强度变化对应的位移转换关系仍保持不变。

具体来讲,若存在装配或微扰等问题致使入射光偏离设定的理想姿态,此时衍射光的最终接收位置必定有所偏离。在待测位移与光栅周期方向严格匹配的基础条件下,根据频移量与入射姿态无关这一特性,偏离的衍射光将仍携带与理想姿态相一致的“相对位移信息”,并不会引发位移转换函数(位移测量原理)的变化。这一特性对于测量光路的调整而言是一个极为有益的结果,它表明即使探测光最终没有入射至探测器预设的中心位置,但只要能够探测到衍射光的干涉变化,此时的位移测量转换原理仍是相匹配的。

## 2.3 光栅干涉系统的位移转换函数

在前几个小节已讨论了单束光栅衍射光产生频移的各种细节,而实际探测光是由至少一束产生频移的光相互干涉组成,其干涉强度变化规律是位移测量的关键基础。因此,本小节旨在给出一种能够快速、准确地判断某一干涉系统的原始位移转换函数及其原始测量分辨率的方法,这对于初判系统的性能指标具有重要意义。

干涉系统的原始位移转换函数由光栅的周期和结构对应的光学细分倍数两方面共同决定,表现为:光栅的周期受到光栅方程的限制,需要设计与之匹配的入射结构,而入射结构又对光学细分倍数产生直接影响,因此,两者相互制约,一般不可拆分讨论。而在绝大多数给定的系统中,仅需考虑以下两个要素就可以快速得到位移转换关系:1)入射光是



否使光栅发生多次衍射; 2) 入射光是否被设置为沿法线对称的差分结构。

由于系统中其它光学元件诸如偏振分光镜、波片等仅起到分光或合束作用, 它们对测量并无实质贡献。因此, 只需关注光栅及其入射部分这一组成的整体就可以完成位移转换函数的判断, 以下展开说明。

设在某一干涉系统的光路结构中, 法线一侧的入射光与光栅发生  $N$  次衍射, 考虑此时衍射光相移量的一般表达式。由于式(12)与入射角度无关, 适用于任意光栅入射条件, 因此单侧衍射光的最终相移量可以直接通过  $N$  次叠加表示为式(17)。

$$\Delta\varphi_1 = N \left[ \frac{2\pi m \gamma}{d_x} x_G + \frac{2\pi h \gamma}{d_y} y_G + (k_{z_{out}} - k_{z_{in}}) \gamma z_G \right] \quad (17)$$

式中,  $k_{z_{out}}$  和  $k_{z_{in}}$  分别是衍射光和入射光向法线方向的投影。

需要说明的是, 为了提升干涉仪的集成化程度, 对于图3坐标系中位于法线左侧的单侧入射光, 一般均采用衍射光和入射光关于光栅  $xoz$  主平面对称的设置方法。这将满足  $k_{z_{out}} = -k_{z_{in}}$  的关系, 且其数值大小可以表示为  $k_{z_{in}} = -\frac{2\pi n \cos\theta_1}{\lambda_0}$ , 其中  $\theta_1$  为入射光与光栅法线所夹角,  $\lambda_0$  为入射光真空中的波长,  $n$  为空气折射率。取  $\gamma = 1$ , 可化简得到式(18), 此式即为干涉系统中单侧衍射光所对应的相移表达式。

$$\Delta\varphi_1 = N \left( \frac{2\pi m}{d_x} x_G + \frac{2\pi h}{d_y} y_G + \frac{4\pi \cos\theta_1}{\lambda_0/n} z_G \right) \quad (18)$$

而与其对应的位于法线另一侧的衍射光因与光源的相对运动关系相反, 衍射级次将取负号, 其相移量可以写为式(19)。

$$\Delta\varphi_2 = N \left( -\frac{2\pi m}{d_x} x_G - \frac{2\pi h}{d_y} y_G + \frac{4\pi \cos\theta_2}{\lambda_0/n} z_G \right) \quad (19)$$

二者之差即为光栅干涉系统的总相移量, 如式(20)。

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_s &= \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 \\ &= N \left[ \frac{4\pi m}{d_x} x_G + \frac{4\pi h}{d_y} y_G + \frac{4\pi}{\lambda_0/n} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) z_G \right] \end{aligned} \quad (20)$$

因此, 只要保证两侧的入射光与光栅法线夹角  $\theta_1$  和  $\theta_2$  相同, 或者阐述为当法线两侧的入射结构具备了严格对称的差分关系时, 可以完全消除由法向运动引入的相移, 此时位移转换函数将与激光波长无关。进一步地, 若以  $2\pi$  作为完整的测量信号周期,

$mN$  和  $hN$  分别对应了  $x$  和  $y$  方向的光学细分倍数, 两个周期方向的位移原始测量分辨率分别如式(21)和式(22)。

$$p_x = \frac{d_x}{2mN} \quad (21)$$

$$p_y = \frac{d_y}{2hN} \quad (22)$$

从上式很容易得出, 为了提高系统的原始测量分辨率, 需要尽可能地降低光栅周期, 并同时提高衍射级次和衍射次数。但正如本节开篇所述, 这三个参量存在一定限制关系, 在某些情况下不可将其拆分独立讨论。例如对于 4700 线/mm 的高刻线密度光栅, 在可见波段下, 由于受到光栅方程的限制, 将至多存在 0 级光和 -1 级衍射光。亦即, 在干涉仪中对于仅有 212 nm 的亚波长光栅, 只能使用 -1 级衍射光作为“信息载体”; 此外, 发生  $N$  次衍射情况要求光栅具有偏振无关特性和较高的衍射效率, 而高刻线密度光栅偏振相关性愈发明显<sup>[24]</sup>, 难以支撑发生多次衍射的结构。因此, 选择与光栅衍射性能特性相匹配的干涉光路结构是极为重要的。

### 3 结论

光栅干涉系统的测量误差分析是先进制造中保证定位台重复性、准确性的关键基础。其中, 当存在装配不理想、光路角度偏离等综合姿态误差时, 光栅的实际运动方向不仅将与设定方向存在夹角差异, 光栅方程也将演变为锥面衍射情形, 此时应将结论推广至更具有普遍性的结果。为厘清该误差的产生来源, 本文基于波矢量的四维表达形式构建了以任意角度入射、光栅沿任意方向运动的多普勒频移理论, 详细阐明了光栅干涉系统测量过程的物理图像及其产生原因, 并得到了光栅干涉系统的诸多特征, 现将全文结论总结如下:

1) 理论结果表明, 反射光和入射光之间的相移(频移)变化是相位因子和相对论效应的叠乘, 乘积因子分别是  $\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}_G$  和相对论中的  $\gamma$  系数, 前者具有很直观的物理几何意义, 表现为两个坐标系相对平移引入的相移, 后者是四维波矢量协变性所导致的必然结果, 且一般情况下均可认为  $\gamma = 1$ 。

2) 光栅是一种具有波矢调控作用的特殊反射器件, 其特殊之处在于:

a. 该反射器件基于光栅方程将  $\Delta\vec{k}$  的  $x$  和  $y$  分量替换为  $\frac{2\pi m}{d_x}$  和  $\frac{2\pi h}{d_y}$ , 这二者分别是  $\Delta\varphi$  在  $x$  方向和  $y$  方



向的相移比例系数;

b. 由于光栅方程中的  $\Delta \vec{k}$  本身描述的是任意环境下的光波矢变化, 因此光栅衍射过程已天然将空气折射率变化考虑在内, 结果直接表现为相移比例系数与空气折射率无关, 即从频移原理上消除了环境的干扰。

因此, 无论采取包括锥面入射在内的任意入射角度, 只要保证衍射级次相同, 则光栅沿周期方向运动产生的频移关系具有一致性。

进一步地, 这也说明即使探测光姿态发生几何错位或偏移探测器的感光中心, 光栅干涉系统位移转换原理的表达式将保持不变, 测量原理仍然可靠。其中的几何测量误差主要由光栅周期方向与理想测量方向之间的夹角余弦引起。

3) 当  $m = h = 0$  时, 此时  $\Delta \varphi_x = \Delta \varphi_y = 0$ , 这说明在沿光栅周期表面运动的条件下, 零级衍射光并不能作为“信息载体”携带相对位移信息, 在光栅干涉系统中是无效的干扰光。

若光栅仅在  $x$  方向有周期, 只需将相移系数中的  $d_y \rightarrow \infty$ , 即回归到一维光栅的表达结果。

4) 对于某一具有多方向周期结构的特殊反射器件, 当其沿表面运动时, 衍射光的相移总和见文中式 (15)。

5) 仅以光路的几何长度改变量来判断干涉测量系统是否产生相移不具备普适性。

激光干涉系统由于受到反射定律  $\Delta \vec{k} = 0$  的严苛限制, 天然缺少沿镜面表面运动的测量维度, 此时法向位移测量贡献光程差。与此相对, 由于光栅的特殊分光作用, 其面内  $\Delta \vec{k} \neq 0$ , 使得光栅干涉系统产生沿周期方向的额外测量维度。此时衍射光相移量虽仍在形式上满足  $\gamma \Delta k \cdot \Delta r_G$  的光程关系, 但开展光栅表面位移测量时, 系统的光几何路径长度保持不变。

6) 为保证位移测量基准仅与光栅参数相关, 光栅干涉系统一般不进行法向测量, 但若将光栅干涉系统设置为对称差分结构, 不仅可以增加光学细分能力, 还可以抵消由法向运动产生的相移。

7) 为了提高系统的原始测量分辨率, 需要尽可能地降低光栅周期, 并同时提高衍射级次和衍射次数。但由于这三个参量存在一定限制关系, 实际系统的干涉光路应与光栅衍射特性匹配。

本文的频移理论从物理底层逻辑出发, 因此得到的相关结论具有普适性, 这不仅对所有光栅干涉

系统的原理分析具有指导作用, 还对各种先进系统中的几何测量误差分析具有重要参考价值。

#### 参考文献

- [1] 李同保. 纳米计量与传递标准 [J]. 上海计量测试, 2005(1): 8-13.
- [2] 王芳, 施玉书, 张树, 等. 基于硅晶格常数的纳米线宽计量技术 [J]. 计量科学与技术, 2022, 66(4): 13-18,47.
- [3] KUNZMANN H, PFEIFER T, SCHMITT R, *et al.* Productive Metrology - Adding Value to Manufacture[J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 2005, 54(2): 155-168.
- [4] GAO W, HAITJEMA H, FANG F Z, *et al.* On-machine and in-process surface metrology for precision manufacturing[J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 2019, 68(2): 843-866.
- [5] MONOSTORI L, KádÁR B, BAUERNHANSL T, *et al.* Cyber-physical systems in manufacturing[J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 2016, 65(2): 621-641.
- [6] LEE J, BAGHERI B, KAO H-A. A Cyber-Physical Systems architecture for Industry 4.0-based manufacturing systems[J]. Manufacturing Letters, 2015(3): 18-23.
- [7] GAO W, KIM S W, BOSSE H, *et al.* Measurement technologies for precision positioning[J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 2015, 64(2): 773-796.
- [8] 李琪, 施玉书, 李伟, 等. 微纳米光学测量的严格耦合波分析方法 [J]. 计量科学与技术, 2020(12): 3-6,11.
- [9] KUNZMANN H, PFEIFER T, FLÜGGE J. Scales vs. Laser Interferometers Performance and Comparison of Two Measuring Systems[J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 1993, 42(2): 753-767.
- [10] KUNZMANN H. Nanometrology at the PTB[J]. Metrologia, 1992, 28(6): 443-453.
- [11] SHIBAZAKI Y, KOHNO H, HAMATANI M. An innovative platform for high-throughput high-accuracy lithography using a single wafer stage[J]. Optical Microlithography XXII, 2009, 7274: 514-525.
- [12] CASTENMILLER T, VAN DE MAST F, DE KORT T, *et al.* Towards Ultimate Optical Lithography with NXT: 1950i Dual Stage Immersion Platform[C]//Optical Microlithography XXIII. International Society for Optics and Photonics, 2010: 76401N.
- [13] LEE C, LEE S-K. Multi-degree-of-freedom motion error measurement in an ultraprecision machine using laser encoder — Review[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2013, 27(1): 141-152.
- [14] HIRANO K, SHIBAZAKI Y, HAMATANI M, *et al.* Latest results from the Nikon NSR-S620 double patterning immersion scanner[J]. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2009, 7520: 75200Z.
- [15] HU P C, CHANG D, TAN J B, *et al.* Displacement measuring grating interferometer: a review[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2019, 20(5): 631-654.

(下转第 26 页)