

# 激光多边坐标测量系统及其发展现状综述



张青岩, 李建双, 缪东晶\*

中国计量科学研究院, 北京 100029

**【摘要】** 激光多边坐标测量系统具有坐标测量精度高的特点, 引起了各国学界、业界以及计量机构的众多关注。然而, 由于大空间范围坐标测量准确度受到多种因素的影响, 且国内关于激光多边坐标测量系统测量与校准相关标准缺失, 激光多边坐标测量系统的发展仍然面临很多问题亟需解决。针对激光多边测量原理、系统参数自标定方法、坐标测量溯源现状及其相关标准制定、测量不确定度评定及其影响因素分析、激光多边坐标测量在姿态测量领域的延伸以及国内外在工业领域的实际应用进行了广泛的调研与总结。其中, 国内外研究人员在补偿环境场干扰、减小测距误差、提升系统自标定精度、增加测站数量、设置约束条件与研究系统最优布局等测量精度提升方向进行了多种不同尝试。同时, 国内激光多边坐标测量系统测量、校准与溯源等相关标准的建立与完善可以为工业领域应用中大型零部件的制造装配和仪器的校准补偿等提供参考与依据。综述了激光多边坐标测量系统在大空间范围测量领域的相关研究进展, 重点关注激光多边法坐标测量原理、系统参数自标定方法、坐标测量不确定度和应用, 旨在为研究人员提供关于激光多边坐标测量系统的发展现状与未来发展趋势, 促进大空间范围坐标测量技术的发展。

**【关键词】** 计量学; 激光多边法; 坐标测量; 系统参数自标定

**【中图分类号】** TB921

**【文献标识码】** A

**【文章编号】** 2096-9015(2024)09-0032-09

**DOI:** 10.12338/j.issn.2096-9015.2024.0100

**【引用本文】** 张青岩, 李建双, 缪东晶. 激光多边坐标测量系统及其发展现状综述 [J]. 计量科学与技术, 2024, 68(9): 32-40, 60.

## A Review of Laser Multilateration Coordinate Measurement Systems and Their Development Status

ZHANG Qingyan, LI Jianshuang, MIAO Dongjing

National Institute of Metrology, Beijing 100029, China

Corresponding author: MIAO Dongjing, Email: [miaodj@nim.ac.cn](mailto:miaodj@nim.ac.cn)

**【Abstract】** Laser multilateration coordinate measurement systems have gained significant attention from academia, industry, and metrology institutions worldwide due to their high coordinate measurement accuracy. However, the accuracy of coordinate measurement in large spatial ranges is affected by various factors, and there is a lack of domestic standards related to the measurement and calibration of these systems in China. Consequently, the development of laser multilateration coordinate measurement systems still faces numerous challenges that need to be addressed. This review comprehensively examines and summarizes the principles of laser multilateration measurement, system parameter self-calibration methods, coordinate measurement traceability status and related standard formulation, measurement uncertainty assessment and analysis of influencing factors, the extension of laser multilateration coordinate measurement in attitude measurement, and its practical applications in industrial fields both domestically and abroad. Researchers have made various attempts to improve measurement accuracy, such as compensating for environmental field interference, reducing ranging errors, enhancing system self-calibration accuracy, increasing the number of measurement stations, setting constraints, and investigating optimal system layouts. Furthermore, establishing and improving relevant standards for domestic laser multilateration coordinate measurement systems, calibration, and traceability can provide references and a basis for

收稿日期: 2024-03-24; 修回日期: 2024-04-11

基金项目: 国家重点研发计划 (2021YFF0600205); 中国计量科学研究院基本科研业务费重点领域 (AKYZD2302-3)。

作者简介: 张青岩 (1998-), 中国计量科学研究院在读研究生, 研究方向: 大尺寸测量技术, 邮箱: [zhangqy@nim.ac.cn](mailto:zhangqy@nim.ac.cn); 通讯作者: 缪东晶 (1985-), 中国计量科学研究院副研究员, 研究方向: 大尺寸空间坐标测量/计量技术, 动态计量技术, 邮箱: [miaodj@nim.ac.cn](mailto:miaodj@nim.ac.cn)。

manufacturing and assembly of large components in industrial applications, as well as instrument calibration and compensation. This review focuses on the principles of laser multilateration coordinate measurement, system parameter self-calibration methods, coordinate measurement uncertainty, and applications. It aims to provide researchers with insights into the current development status and future trends of laser multilateration coordinate measurement systems, thereby promoting the advancement of coordinate measurement technology in large spatial ranges.

**【Key words】** metrology, laser multilateration, coordinate measurement, system parameter self-calibration

## 0 引言

大空间范围位姿与尺寸的精确测量是大型构件加工制造与装配的保证,在航空航天、汽车船舶、风力发电、高铁动车等领域有着广泛的需求<sup>[1-3]</sup>。目前常见的坐标测量系统包括支导线原理的关节臂测量系统、正交坐标系的三坐标测量机、极坐标系的激光扫描系统和激光跟踪仪、长度交汇原理的激光多边测量系统以及角交汇原理的摄影测量系统等<sup>[4]</sup>。对于数米到数十米大空间范围的坐标测量,关节臂测量系统、坐标测量机的测量范围不能满足要求;激光扫描系统、摄影测量系统的测量范围较大,但其测量精度目前仍不能很好满足需要;激光跟踪仪的测量范围根据型号不同可达数十至上百米,但其由光学码盘引入的测角误差对测量精度的影响使得单台跟踪仪理论测量精度难以满足当前需要。激光多边测量系统不使用跟踪仪角度测量结果,只引入了符合阿贝原则的跟踪仪测距结果,可溯源至激光波长,其理论精度相对较高,通过消除环境因素干扰、补偿测距误差、调整测站布局参数并采用合适约束条件等方法优化激光多边法坐标测量结果,可满足当前大尺度范围下动态坐标的测量误差,但其成本目前仍然较高。

如图 1 所示,随着激光多边法的研究不断深入,在过去 30 年中,激光多边法相关论文的年发表量呈现总体上升趋势。自 2012 年起,激光多边测量技术在现代工业领域机床定位与几何误差测量、大尺寸工件检测与坐标测量机的校准补偿中得到了越来越多的应用。

本文介绍了激光多边法的坐标测量原理、四测站自标定原理,阐述了系统组成、主要误差来源和提高坐标测量精度的方法,介绍了激光多边法如何实现姿态测量,概述了激光多边法在测量方面的应用并进行总结。

## 1 激光多边法的基本原理

1985 年美国国家标准局 (NBS) 的 Lau K 等提

出三测站激光多边测量方法。早期的激光多边测量系统采用三路由激光干涉仪与双轴导航机构构成的单束跟踪单元,通过跟踪机构追踪一个共同的被测目标,基于三路激光干涉仪的测距结果及站点间预标定距离计算被测目标的坐标测量值<sup>[5]</sup>。



图 1 激光多边法论文年度发文章统计

Fig.1 Annual publication statistics for papers on laser multilateration methods

### 1.1 坐标测量原理

激光多边测量原理如图 2 所示,其系统由三台测站 Lt1、Lt2、Lt3 与被测点 P 表示,坐标系设 Lt1 为原点, Lt2 在 x 轴上, Lt3 在 xoy 平面,各测站坐标参数  $x_{Lt2}$ ,  $x_{Lt3}$ ,  $y_{Lt3}$  通过预标定获得,被测点 P 在 xoy 平面上方。则当 Lt1、Lt2、Lt3 共同瞄准空间中的被测点 P 时,通过激光测距得到 P 到测站的距离  $L_{Lt1}$ 、 $L_{Lt2}$ 、 $L_{Lt3}$ 。由距离公式建立方程组 (1),其中  $i = 1, 2, 3$ ,可解得 P 在 xoy 平面两侧的解,由定义, P 坐标唯一确定。

$$(x - x_{Li})^2 + (y - y_{Li})^2 + (z - z_{Li})^2 = L_{Li}^2 \quad (1)$$

对于四测站多边系统,设测站 Lt4 在 xoy 平面外,由方程组 (1) 解算的 P 点理论坐标可由 Lt4 的测距值唯一确定<sup>[6]</sup>。

### 1.2 四测站冗余自标定方法

在 1.1 节测量被测点坐标时,认为系统测站光学中心的坐标已知,然而实际应用中测站光学中心坐标难以直接测量,其精度又直接影响被测点坐标的测量精度。因此实现测站光学中心坐标的高精度

标定对保障被测点的坐标测量精度意义重大。

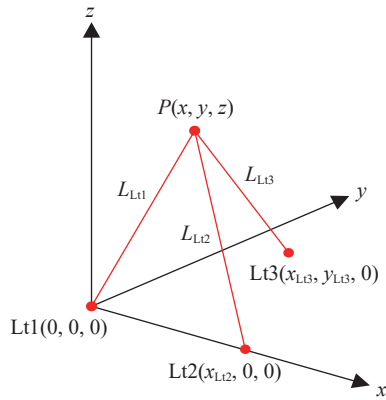


图 2 激光多边测量原理  
Fig.2 Laser multilateration measurement principle

1992 年, 佛罗里达大西洋大学 (FAU) 的 Zhuang H 等提出了四测站冗余自标定方法, 其基于重复性 0.01 mm、准确度 0.15 mm 的坐标测量机 (CMM) 验证了多边法在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的平均坐标测量误差分别为 0.27 mm、0.12 mm、0.46 mm, 未提供测量范围<sup>[7]</sup>。

目前四测站冗余自标定方法根据测距原理可分为绝对测距模型与相对测距模型, 如图 3 所示。四测站多边测量系统形成冗余系统, 使得系统参数方

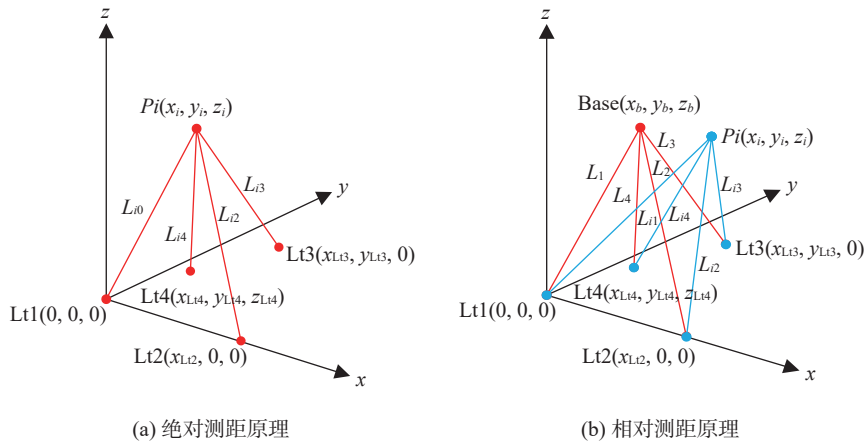


图 3 四测站激光多边测量系统  
Fig.3 Four-station laser multilateration measurement system

对于相对测距的四测站激光多边测量系统, 如图 3(b) 所示, 在图 2(a) 设置初始点  $Base(x_b, y_b, z_b)$ 。相对测距值为被测点  $P_i$  到 Base 的距离变化量  $d_{Li}$ , 结合 Base 到测站的距离  $L_k$ , 由式 (5) 转换为绝对测距的  $L_{ik}$ 。  $L_k$  由 Base 与测站坐标表示, 则自标定所需要的最少  $P_i$  点数为 9, 从而实现了相对测距与绝

程组在自标定点足够多时, 未知数个数小于方程数, 构成非线性超定方程组。对于绝对测距的激光多边测量系统, 如图 3(a), 测站 Lt1、Lt2、Lt3 与被测点  $P_i$  的布局与 1.1 节一致, 测站 Lt4( $x_{L14}, y_{L14}, z_{L14}$ ) 在  $xoy$  平面外, 则需标定的未知系统参数为  $x_{L12}$ 、 $x_{L13}$ 、 $y_{L13}$ 、 $x_{L14}$ 、 $y_{L14}$ 、 $z_{L14}$  共 6 个。每增加一个被测点  $P_i$  将引入 3 个未知坐标  $x_{Pi}$ 、 $y_{Pi}$ 、 $z_{Pi}$  与 4 个理论距离  $L_{APi}$ 、 $L_{BPi}$ 、 $L_{CPi}$ 、 $L_{DPi}$ , 如式 (2) 所示, 当  $n \geq 6$  时, 系统参数方程组可解。

$$(x_{L1k} - x_i)^2 + (y_{L1k} - y_i)^2 + (z_{L1k} - z_i)^2 = L_{ik}^2 \quad (2)$$

式中,  $k = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2, \dots, n$ 。

在实际测量时, 考虑测距误差  $\Delta L_{kPi}$  的影响, 构造函数方程组 (3)。

$$f_{ik} = (x_{L1k} - x_i)^2 + (y_{L1k} - y_i)^2 + (z_{L1k} - z_i)^2 - (L_{ik}^2 + \Delta L_{ik}^2) \quad (3)$$

为了使测距误差  $\Delta L_{kPi}$  影响最小化, 降低自标定误差的影响, 将函数方程组 (3) 转化为非线性最小二乘问题, 构造方程 (4), 通过 Levenberg-Marquardt 非线性最小二乘优化算法求解, 得到系统参数的自标定结果<sup>[8-13]</sup>。

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{ik}^2 \quad (4)$$

对测距的多边法模型的统一。

$$L_{ik} = L_k + dL_i \quad (5)$$

1998 年, 日本国家计量院 (NMIJ) 的 Toshiyuki T 等人基于四站冗余激光多边测量原理设计了多边测量系统, 实现了跟踪干涉仪、初始点坐标的自标

定与目标点坐标测量, 基于自标定结果得到的目标坐标测量误差在 1 m 距离下约 40  $\mu\text{m}$  [14]。

### 1.3 基于约束的自标定方法

通过合理设置约束条件, 增加约束方程, 可以将三测站条件下的非线性欠定方程组变为超定方程组, 实现三测站多边测量系统参数的自标定, 该方法可以减少系统所需跟踪仪数量, 降低成本, 同时减少一路测量光也可以降低遮挡断光现象的发生概率。1992 年, Zhuang H 等提出了基于平面约束的三测站自标定方法 [7]。2003 年, Zhuang H 等基于转台与玻璃平板提供的平面约束, 通过实验研究了多边法自标定问题, 并指出比测距精度低的角度测量对预测跟踪仪镜面光束入射坐标起到了作用 [15]。2020 年, 天津大学的 Zhang F-M 等基于高精度平面被测点组拟合 100 nm 平面度的标准平面, 构建平面约束方程, 实现了三测站的系统参数自标定, 通过标准杆验证了 20 m 范围内三测站平均尺寸测量误差为 39  $\mu\text{m}$ , 对应的四测站平面约束测量结果为 29  $\mu\text{m}$ , 无约束四测站测量结果为 56  $\mu\text{m}$  [16]。2020 年, 天津大学的何俊提出了基于球心拟合的三测站自标定方法, 并基于该系统实现了距离 7.5 m 处的标准尺尺寸测量误差 21  $\mu\text{m}$  [17]; 2014 年, 合肥工业大学的胡进忠等基于无线传感网络与测站中的再集成靶镜, 引导测站通过绝对测距获得测站间距, 实现了无目标点自标定 [18]; 2023 年, 清华大学 Jiang R 等提出了基于双频光梳 (DCR) 互对准测量测站间距的激光多边测量系统自标定方法 [19]。

## 2 激光多边坐标测量系统精度影响因素

激光多边测量系统的组成包含上位机、同步触发装置、3 台及以上具有跟踪与测距功能的测站、高精度反射靶球与被测对象。激光多边测量系统在大尺度范围内运动坐标测量精度如图 4 所示, 主要受到信号时延、激光测距精度、系统参数自标定精度、测站数量与布局等因素的影响。其中激光测距精度受到环境因素、靶球误差与测量距离的影响; 系统参数自标定精度受到测站布局与数量、自标定点分布与数量、复合约束、测距精度、最优化方程组初值选取与数据截取位数等影响; 坐标测量精度的影响因素还包括同步触发装置及其他因素引入的信号时延, 测站数量与布局等 [20-24]。同时, 在不同的测量范围内, 各因素对坐标测量精度的影响程度也不相同, 往往需要根据具体被测对象进行分析。

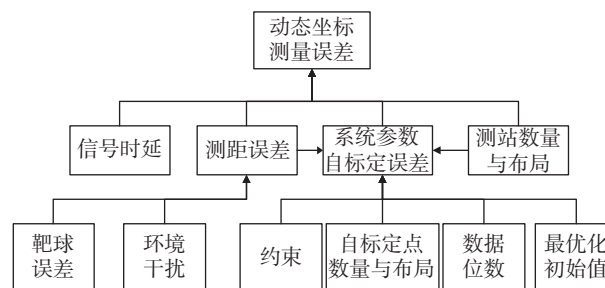


图 4 激光多边系统坐标测量精度影响因素

Fig.4 Factors influencing the coordinate measurement accuracy of laser multilateration systems

### 2.1 测距精度影响因素

激光多边测量系统单台测站的测距精度影响因素主要包括靶球误差和环境扰动。

由靶球引入的误差对坐标测量影响不可忽略。2018 年, 天津大学任瑜等按均匀分布分析 Leica RRR 靶球引入的目标点跳动标准不确定度在同靶球测量时为 3.6  $\mu\text{m}$ , 在多靶球测量时为 3.9  $\mu\text{m}$  [25]。2020 年, LNE-Cnam 的 Guillory J 等研究了靶球及万向节机构引入的不确定度为 3.9  $\mu\text{m}$  [20]。

当测量范围增大, 不同光路折射率梯度引起的光线弯曲、光速变化和折射率时变引起的湍流导致多边法测距误差受环境场影响大小不同, 对坐标测量结果造成的影响也不同 [27-28]。任瑜在温度梯度为 0.5  $^{\circ}\text{C}/\text{m}$ , 压力和湿度变化不明显时, 得到环境干扰对测距精度的影响为 0.27  $\mu\text{m}/(^{\circ}\text{C}\cdot\text{m})$  (均匀分布) [25]。2023 年, Guillory J 等在 6.3 m  $\times$  10.3 m  $\times$  3.1 m 空间研究了环境对测距精度的影响, 在 165 分钟内, 同一位置温度随时间变化小于 0.5  $^{\circ}\text{C}$ , 不同位置间温度偏差小于 0.4  $^{\circ}\text{C}$ , 二氧化碳含量为 530  $\pm$  80 ppm, 认为测量距离 10 m 的环境误差引入了 4.5  $\mu\text{m}$  的影响 [22], 其中温度测量误差占据主要影响。

在测量距离较大时, 不同光路途径空间点温度值与计算测距值时使用的空间整体温度的微小差异会导致各个光路引入的测距误差不同且不可忽视, 同时, 该测距误差会受到被测点到测站距离变化的误差放大因子的影响。因此, 实现对环境场温度的精准测量与空间折射率的精细补偿对于提升激光多边测量系统坐标测量精度有着重要的作用, 目前仍然缺少针对沿光束路径温度梯度变化对坐标测量精度影响的相关研究。

### 2.2 自标定精度影响因素

测站坐标的自标定精度受到多种因素影响, 难以直接评定, 与最终坐标测量精度息息相关, 国内外

研究人员针对自标定精度及其影响因素如下研究。

### 2.2.1 测站数量与自标定点数的影响

通过增加测站数量、自标定点数量,可以增加用于最优化的方程数量,使测量结果优化效果更佳。2003年,天津大学的林永兵等指出随着被测点数增多,系统参数测量标准差减小,增加被测点数量提升系统参数自标定精度<sup>[26]</sup>。2020年,中国计量科学研究院缪东晶等指出当测站数量由4台增加到7台时,坐标测量精度逐步提升,受边际效应影响,在测站数量大于7时提升已不显著<sup>[27]</sup>。

### 2.2.2 测站布局的影响

优化测站布局与自标定点分布是较为主流的提升系统参数自标定的方法,国内外的研究人员建立了PDOP因子、遗传算法、二次优化、误差放大因子等多种模型,研究测站的最优化布局。1998年,Toshiyuki T指出四测站激光多边测量系统测站布局时,为实现系统坐标的自标定,不能出现三站共线与四站共面的情况,并讨论了测量结果的评估方法与正四面体最佳布局模型<sup>[28]</sup>。2000年,Toshiyuki T在四测站系统自标定时,定性的提出了自标定布局会引入新的测量误差,并建议使用采用包含被测区域的正四面体测站布局以减小测量误差<sup>[29]</sup>。2000年,清华大学胡朝晖等分析了自标定方程组的雅可比矩阵,总结了二维测量空间下三测站自标定的一系列规律:被测点轨迹不为任意两测站的连线;不为过测站的两条或一条直线;三测站不能共线<sup>[30]</sup>。

针对被测点位置的几何精度衰减因子模型(PDOP),国内总结了一系列测站自标定规律与系统布局方法。2002年,天津大学的林永兵等提出多边法PDOP最小化模型,根据反射镜限制提出了等腰四面体最佳布局<sup>[24]</sup>,基于空间PDOP变化规律得到了该布局下的最佳测量区域<sup>[31]</sup>。2003年,林永兵总结了一系列基于相对测距的四测站自标定规律:初始点坐标 $x$ 、 $y$ 分量对测量精度的影响比 $z$ 分量;被测点在同一直线上无法完成系统自标定;被测点在测站正上方的一定区域内均布时,自标定效果较好;被测点的 $x$ 、 $y$ 坐标分散分布, $z$ 坐标靠近 $xoy$ 平面时自标定效果好;初始点最优布局范围与被测点类似,但不应在同一平面内<sup>[26]</sup>。2023年,中国计量科学研究院的闫阳等基于PDOP值最小化进行的研究提出当基站对应的PDOP值小于3时,自标定精度与被测点坐标精度更高<sup>[32]</sup>。

2014年,合肥工业大学的胡进忠等基于对无目

标点自标定模型的误差传递规律的理论分析,得到了直角三棱锥优化布局<sup>[33-34]</sup>。2021年,天津大学的李笑宇等基于二次标定引入十字交叉空间分布模型,通过初次自标定结果再标定提升了测量精度<sup>[35]</sup>。

在多边法布局中,可以使用遗传算法进行优化。2016年,北京交通大学Wang H等基于测站位置受反射器视角范围的约束条件,通过遗传算法对测站位置进行了优化<sup>[36]</sup>。2022年,上海交通大学Sheng Y等简化了激光束的遮挡检测,通过改进的遗传算法对激光跟踪仪的布局进行了优化<sup>[37]</sup>。

中国计量科学研究院基于误差传递模型研究了关键布局参数的影响。2023年,梁楚彦等从坐标解算公式推导测距误差传递模型,分析测站布局对测量精度的影响,指出在一定范围内增大 $L$ 、 $H$ 关键布局参数可改善坐标测量精度,并通过仿真及实验指出在 $L$ 、 $H$ 参数接近时,激光多边测量精度受测站位置差异影响较小<sup>[38]</sup>。

### 2.2.3 约束的影响

在大尺度范围的测量过程中,通过在局部空间布置标准长度约束、平面约束等方法构建约束方程,并对约束方程设置合适的权重,可以实现局部点坐标测量结果的优化。2015年天津大学谢政委等构建大空间精密三维坐标控制场时,为提升单台激光跟踪仪在局部空间的测量精度,减小统一坐标系过程中的转站误差,利用靶球座与碳纤维杆构造微米级精度的空间长度基准,在测量空间中作为几何约束优化跟踪仪对全局控制点的坐标测量精度,实现对区域测量场的精度增强<sup>[39]</sup>。2019年,中国计量科学研究院的郑继辉等提出了一种在坐标轴方向设置标准长度约束的自标定算法,构造自标定优化函数并调整对应优化函数因子的权,实现了标准杆长度在距离坐标系原点7.0~8.3 m范围内的测量误差为-9.5~4.6  $\mu\text{m}$ ,提高了系统参数自标定精度与大尺度范围下的坐标测量精度<sup>[40]</sup>。

### 2.2.4 数据位数的影响

2020年,Linares J M等研究了使用Maple软件的NonlinearFit函数处理多边法非线性优化时,数据位数对坐标解算精度的影响:不考虑靶球误差和环境扰动时,在靶球距跟踪仪4 m (20 m)时,使用20位有效数字比10位有效数字的测距不确定度减小了84%;当引入靶球误差和环境扰动时,由于数字舍入,导致解算结果的测距不确定度比理论值低估,其中使用10位有效数字解算的测距不确定度比

20 位数据解算结果多低估了 7% (12%)<sup>[41]</sup>, 约 2.3 μm (5.0 μm)。

### 2.3 测站同步性与运动的影响

大范围空间的动态坐标与姿态测量已逐渐成为加工现场的基本需求<sup>[42]</sup>, 针对运动目标的测量需求, 需要对测站测量同步性提出更高的要求。在测量过程中由于靶球的移动, 测站测量不同步引入的时间差会导致较大的坐标测量误差。设靶球的移速为 0.1 m/s, 以 Leica 的 AT960 跟踪仪为例, 使用 Spatial Analyzer 软件轮询测量功能, 三台跟踪仪的测量时延最大约为 30 ms, 则其中两台跟踪仪测量时靶球实际坐标误差可达 3 mm。所以采用合适的同步触发装置控制信号时延对提升多边形坐标测量精度十分重要。2021 年, 德国联邦物理技术研究院 (PTB) 的 Nitsche J 等基于激光多边形法的六自由度位姿测量系统在靶球 0.1 m/s 移速下的动态偏差为 20 μm, 对应的静态测量偏差为 5 μm, 指出同步过程可能存在 0.2 ms 偏移<sup>[43]</sup>, 即仅仅使用同步触发并不能排除其他因素引入的测站测量不同步。

### 3 激光多边形法姿态测量

基于刚体上三个及以上固定点的高精度坐标测量结果, 可以通过坐标系变换关系获得刚体在世界坐标系的位置与姿态。因此, 通过多边形法实现对被测目标上固定点的高精度坐标测量, 可以进一步计算被测目标的姿态。

2017 年, 中国计量科学研究所的缪东晶等提出了基于多边形法的大尺寸位姿测量系统的自标定方法, 通过 7 台按照一定规则布局的激光跟踪干涉仪对 3 个靶球进行跟踪, 实现了位姿测量系统测站系统参数的自标定与靶球坐标的测量, 并在 ±2 μm 测距误差下设计仿真实验, 指出测角误差随被测位置数目增加显著降低<sup>[44]</sup>。

2020 年, 中国计量科学研究所的张帅等根据对 3 个被测靶球分配的跟踪干涉仪数量不同, 研究了“322”和“331”两种不同跟踪方式对位姿测量精度的影响, 在被测点远离测站平面的“331”布局下, 对比 0.1”高精度单轴转台下得到的姿态误差分布在 [-24. 4”, 18. 9”]<sup>[45]</sup>。

2021 年, PTB 的 Nitsche J 等基于激光多边形测量原理设计了六自由度姿态测量系统, 与参考坐标测量机相比, 0.1 m/s 移速下动态坐标测量偏差为 20 μm, 静态测量偏差为至 5 μm, 未给出姿态测量误差评定

结果<sup>[43]</sup>。

## 4 激光多边形测量系统的应用

如表 1 所示, 在过去十多年中, 激光多边形测量系统在各种制造和装配中得到了越来越广泛的应用, 尤其是在机床误差评定与补偿、各种大尺寸零部件制造和装配、低精度测量仪器校准与补偿等领域, 下面通过一些研究内容说明其应用的广度和复杂性。

表 1 激光多边形测量系统应用

Tab.1 Applications of laser multilateration measurement systems

机床	零部件	测量仪器
线性轴 (几何误差)	光学平板	机器人校准
旋转轴 (几何误差)	抛物镜 (面形误差 几何误差)	坐标测量机 (几何误差)
机床 (定位重复性 热变形)	特大齿轮 标准块规	关节臂测量机

#### 4.1 机床误差评定与补偿

随着现代制造技术发展对机床高效和高精度加工需求的不断提升, 研究几何误差、热变形误差等因素对机床加工精度的影响, 提高多轴数控机床加工精度、实现机床误差测量和补偿已成为国内外的一个研究热点。以激光球杆、干涉仪测量为代表的机床几何误差检测方法具有检测效率与准确性较低的不足, 因而, 可用于快速准确地评定机床线性轴与旋转轴的几何精度的激光多边形测量方法在最近几年受到了越来越多的青睐。

2012 年, 西安交通大学的 Wang J 等在 600 mm×750 mm×450 mm 测量范围内实现了顺序多边形测量系统与跟踪仪的铣床线性轴的测量最大偏差小于 3 μm; 顺序多边形测量系统与 Renishaw 旋转测量系统 RX10 的旋转轴的测量最大偏差小于 4 μrad, 证明了测量方法的可行性<sup>[46]</sup>。

2015 年, Ezedine F 等采用了顺序多边形测量技术补偿精度 5 μm 的超小型机床在 200 mm×200 mm × 200 mm 范围的线性轴几何误差, 并用一个标准迈克尔逊干涉仪测量补偿剩余映射误差, 将机床几何误差由补偿前的 8±1 μm 降为多边形法补偿后的 2±0.9 μm, 提高了超小型机床线性轴的测量精度<sup>[47]</sup>。次年, Ezedine F 等分析了激光干涉仪与多边形法体积误差补偿的两测量残差图, 基于 DOE 方法改善机床

校准的多边法智能参数设置<sup>[48]</sup>。

2015年, Zhang Z J等基于绝对测距顺序多边法, 通过测量目标点在转台平面的3个固定点, 实现了机床旋转轴几何误差的测量<sup>[49]</sup>。

2023年, 南京理工大学的 Liu X B等提出在使用顺序多边测量时, 机床定位重复性对机床几何误差的影响大于测距误差, 应考虑机床的重复性对几何误差测量的影响<sup>[50]</sup>。

2023年, Hsu C-H等通过多边法识别转台的六自由度几何误差, 其中线性几何误差和角度误差的最大相对误差分别为3.25%和2.30%; 与传统的指针指示器方法测量结果比较, 其 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向归一化偏差 $E_n$ 的平均绝对值分别为0.77、0.39和0.32, 均小于1, 证明了测量方法的可行性和有效性<sup>[51]</sup>。

机床内部产热和环境变化可引起与几何误差大小相当的机床热变形。

2015年, E. Gomez-Acedos等人使用顺序多边法测量大型机床在 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 轴上热线性畸变与使用四个电子精密无线水平仪测量的角热畸变结果, 认为多边测量适用于大型机床热变形测量, 由于保密问题, 作者未提供热畸变测量的数值结果<sup>[52]</sup>。Aguado S等人研究了机床体积检测中测量噪声与测站布局对多边法测量不确定度的影响因素<sup>[6]</sup>。

2014年, Linares J-M等在一台测量范围300 mm×240 mm×200 mm的小型机床上, 分别以各自多边测量结果作为误差映射, 使用参数补偿矩阵对机床测量空间点测量误差进行补偿, 与补偿前约19 μm的最大几何误差、11 μm的平均几何误差相比, 机床各测点处最大几何误差减小了55.8%以上, 平均误差减小了58.6%以上<sup>[53]</sup>。

基于多边法对线性轴与旋转轴相关参数的误差映射相比于传统方法可以有效节省时间、降低成本, 从而使得激光多边测量系统成为评定与补偿机床几何误差、提高机床准确度的可靠手段。

## 4.2 零部件测量与装配

激光多边法被越来越多的应用于零件检验、大型部件的拼接和最终装配、光学元件对齐和非球面镜的制造过程等领域, 相比于传统三坐标测量机与单台激光跟踪仪, 激光多边法实现了效率与精度的提升。

2020年, James N通过四站多边系统测量了400 mm×400 mm光学平板和200 mm×200 mm的ULE®平板, 其 $z$ 坐标测量结果的标准差分别为

0.73 μm和0.26 μm, 并针对长时间测量的结果指出需要补偿时间相关的测量误差<sup>[54]</sup>。

2021年, 北京空间机电研究所的陈佳夷等基于四站多边法对2 m口径抛物镜的几何参数和面形误差进行了测量, 分别实现了顶点曲率半径误差0.16 mm、非球面系数误差0.0006、面形RMS误差1.06 μm的测量精度<sup>[55]</sup>。

2021年, 郑州大学的王子辰等采用柔性关节测量臂与多边测量系统建立了特大齿轮组合式测量网络, 其对标称长度100 mm的标准块规测量的误差平均值为0.007 mm, 标准差为0.004 mm, 未进行特大齿轮样板的验证实验<sup>[56]</sup>。

基于激光多边测量系统测量范围广、精度高的特点, 其可提供溯源到激光波长的测量结果, 适用于中大型零件的测量与检测。

## 4.3 测量仪器校准与补偿

激光多边测量系统的坐标测量可溯源至激光波长, 具有溯源链短的优点, 可作为标准器, 用于提供坐标参考量值以对其他计量仪器的精确度与可靠性进行验证与校准<sup>[57-59]</sup>, 并可基于误差映射通过编写相关软件算法构建数学模型对仪器进行补偿。

1985年, Lau K等指出三站激光跟踪系统可以被视为一种通用的便携式机器人校准工具<sup>[5]</sup>。

2003年, PTB的Bosemann W等通过大量测距值计算出类球板的大型二维参考网格, 实现了测量范围5 m×2 m×2 m的大型坐标测量机测量不确定度小于10 μm, 并将该成果应用于工业环境中大型CMM的校准和误差映射<sup>[60]</sup>。

2005年, Kenta U基于多边法在0.33 m<sup>3</sup>体积内实现了坐标测量机的参数误差估计, 其与球板法分别作为误差映射得到的CMM参数估计值之差为2 μm, 标准差小于1 μm, 参数估计值之差与坐标测量机标称最大允许误差1.8 μm接近, 证明了激光多边测量系统校准CMM的有效性<sup>[61]</sup>。

2009年, PTB的Norbert G比较了激光多边法与孔板法对测量范围1150 mm×1000 mm×1000 mm的CMM误差映射, 二者的旋转轴测量误差之差小于1角秒, 平移误差之差大部分小于1 μm, 两者可以替代使用, 证明了激光多边法评估CMM几何误差的有效性<sup>[62]</sup>。

2012年, PTB的Wendt K等以CMM自补偿功能测得的标准杆长度作为参考, 使用激光多边法测量值对关闭自补偿功能的CMM的标准杆测量值补

偿, 测量结果与参考长度值的偏差小于  $1.2 \mu\text{m}$ ; 类似的, 以干涉仪的测量结果作为参考, 实现了测量范围  $1 \text{ m}^3$  内的尺寸测量不确定度小于  $0.4 \mu\text{m}$ , 证明了激光多边法精确测量三维坐标的能力与误差补偿能力<sup>[63]</sup>。2014 年, Jorge Santolaria 等人基于四测站的多边测量系统对关节臂式坐标测量机进行了校准, 指出使用多边测量系统提供参考标准进行补偿能够提高关节臂式坐标测量机的精度, 但未给出对关节臂测量机精度提升的具体数值<sup>[64]</sup>。

激光多边测量系统通过其高精度坐标参考值与待检仪器同目标坐标测得值对比, 可以评估精度较低的待检仪器性能, 进而为仪器校准与补偿提供支持。

## 5 结论

激光多边测量系统相比于传统坐标测量方法, 具有较高的测量精度, 近年来, 在航空、航天、高铁等大空间尺寸零部件的检测、装配, 机床定位校准与补偿, 以及测量仪器能力评估中得到了越来越多的应用。

目前, 激光多边测量系统的校准、从实验室到现场测量的溯源、动态坐标测量不确定度评定等问题仍然有待研究。针对激光多边测量系统的校准问题, 可基于空间距离、空间平面几何关系、空间角度关系等复合约束条件, 对大空间范围下多边测量系统进行校准, 并通过非线性方程组优化提升系统参数自标定结果的精度。针对从实验室到现场测量的溯源问题, 可通过构建环境场对光路折射率补偿, 减小折射率变化导致光路弯曲、光速时变等对测量结果引入的影响, 提升自标定与测量结果的精度, 保证现场测量溯源的效果。针对于动态特性下的多边测量系统坐标测量不确定度问题, 可基于激光干涉仪提供的一维运动轨迹参考值、转台提供的圆运动轨迹参考值与多边测量系统运动轨迹测量值比对的方法, 深入动态条件下的激光多边测量系统特性研究。

## 参考文献

- [1] 赵欢, 葛东升, 罗来臻, 等. 大型构件自动化柔性对接装配技术综述 [J]. 机械工程学报, 2023, 59(14): 277-297.
- [2] 邹冀华, 刘志存, 范玉青. 大型飞机部件数字化对接装配技术研究 [J]. 计算机集成制造系统, 2007(7): 1367-1373.
- [3] 吴晓峰, 张国雄. 现代大尺寸空间测量方法 [J]. 航空制造技术, 2006(10): 68-70.
- [4] 杜福洲, 文科. 大尺寸精密测量技术及其应用 [J]. 航空制造技术, 2016(11): 16-24.
- [5] LAU K, HOCKEN R, HAYNES L. Robot performance measurements using automatic laser tracking techniques[J]. *Robotics and computer-integrated manufacturing*, 1985, 2(3-4): 227-236.
- [6] AGUADO S, SANTOLARIA J, SAMPER D, *et al.* Influence of measurement noise and laser arrangement on measurement uncertainty of laser tracker multilateration in machine tool volumetric verification[J]. *Precis Eng*, 2013, 37(4): 929-943.
- [7] ZHUANG H, LI B, ROTH Z S, *et al.* Self-calibration and mirror center offset elimination of a multi-beam laser tracking system [J]. *Robotics and autonomous systems*, 1992, 9(4): 255-269.
- [8] 吴斌, 许友, 杨峰亭, 等. 激光跟踪绝对测长多边法三维坐标测量系统 [J]. 红外与激光工程, 2018, 47(8): 140-145.
- [9] 张国雄, 李杏华, 林永兵. 多路法激光跟踪干涉测量系统的研究 [J]. 天津大学学报, 2003(1): 23-27.
- [10] 孙旭东, 张国雄, 付继有. 多路激光跟踪干涉柔性坐标测量系统三自由度坐标测量方法的研究 [J]. 电子测量与仪器学报, 2000(1): 22-25, 36.
- [11] 林永兵, 张国雄, 李真, 等. 多路激光跟踪干涉三维坐标测量系统冗余技术 [J]. 计量学报, 2003(1): 1-5.
- [12] 付继有, 丁耀, 张国雄. 多路激光跟踪干涉仪坐标测量系统的容错设计 [J]. 航空计测技术, 1997(6): 3-4, 16.
- [13] 林永兵, 张国雄, 李真, 等. 四路激光跟踪干涉三维坐标测量系统自标定与仿真 [J]. 仪器仪表学报, 2003(2): 205-210.
- [14] TAKATSUJI T, GOTO M, KUROSAWA T, *et al.* The first measurement of a three-dimensional coordinate by use of a laser tracking interferometer system based on trilateration[J]. *Measurement Science and Technology*, 1998, 9(1): 38-41.
- [15] ZHUANG H, MOTAGHEDI S H, ROTH Z S, *et al.* Calibration of multi-beam laser tracking systems[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2003, 19(4): 301-314.
- [16] ZHANG F M, ZHANG H D, QU X H. A multilateral laser-tracking three-dimensional coordinate measuring system based on plane constraint[J]. *Measurement Science and Technology*, 2020, 31(1): 1-7.
- [17] 何俊. 基于距离约束的多边激光三维坐标测量系统研究 [D]. 天津: 天津大学, 2020.
- [18] 胡进忠, 余晓芬, 刘媛媛. 基于激光多边法的坐标测量系统自标定研究 [J]. 电子测量与仪器学报, 2014, 28(2): 130-137.
- [19] JIANG R, ZHOU S, YANG Q, *et al.* Mutual collimation self-calibration for dual-comb ranging-based multilateral coordinate measurement[J]. *Opt Lett*, 2023, 48(16): 4213-4216.
- [20] GUILLORY J, TRUONG D, WALLERAND J-P. Uncertainty assessment of a prototype of multilateration coordinate measurement system[J]. *Precision Engineering*, 2020, 66: 496-506.
- [21] GUILLORY J, TRUONG D, WALLERAND J-P. Multilateration with Self-Calibration: Uncertainty Assessment, Experimental Measurements and Monte-Carlo Simulations[J]. *Metrology*, 2022, 2(2): 241-262.
- [22] GUILLORY J, TRUONG D, WALLERAND J-P, *et al.* An SI-traceable multilateration coordinate measurement system with half the uncertainty of a laser tracker[J]. *Measurement Science and Technology*, 2023, 34(6): 1-6.
- [23] RAFELD E K, KOPPERT N, FRANKE M, *et al.* Recent developments on an interferometric multilateration measurement system for large volume coordinate metrology[J]. *Measurement Science and Technology*, 2021, 33(3): 1-10.



- [24] 林永兵, 张国雄, 李真, 等. 四路激光跟踪三维坐标测量系统最佳布局[J]. 中国激光, 2002(11): 1000-1005.
- [25] 任瑜, 刘芳芳, 张丰, 等. 激光跟踪仪多边测量的不确定度评定[J]. 光学精密工程, 2018, 26(10): 2415-2422.
- [26] 林永兵, 李杏华, 张国雄. 基于多边法的三维坐标测量系统自标定最优方案[J]. 计量学报, 2003(3): 166-173.
- [27] 缪东晶, 孙威, 李建双, 等. 测站数量对多边法坐标测量系统测量精度的影响[J]. 仪器仪表学报, 2020, 41(7): 38-44.
- [28] TAKATSUJI T, KOSEKI Y, GOTO M, *et al.* Restriction on the arrangement of laser trackers in laser trilateration[J]. *Measurement Science and Technology*, 1998, 9(8): 1357-1359.
- [29] TAKATSUJI T, GOTO M, KIRITA A, *et al.* The relationship between the measurement error and the arrangement of laser trackers in laser trilateration[J]. *Measurement Science and Technology*, 2000, 11(5): 477-483.
- [30] 胡朝晖, 王佳, 刘永东, 等. 纯距离法激光跟踪坐标测量系统的布局与仿真[J]. 光学技术, 2000(5): 395-399.
- [31] 林永兵, 张国雄, 李真, 等. 四路激光跟踪测量系统最佳测量区域和系统自标定[J]. 中国激光, 2002(11): 1006-1010.
- [32] 闫阳, 夏文杰, 林虎. 激光跟踪多边异步测量系统标定布点布局研究[J]. 计量学报, 2023, 44(8): 1188-1195.
- [33] 胡进忠, 余晓芬, 彭鹏, 等. 基于激光多边法的坐标测量系统布局优化[J]. 中国激光, 2014, 41(1): 185-190.
- [34] 胡进忠, 余晓芬, 任兴, 等. 基于激光多边法的坐标测量系统最佳布局[J]. 中国激光, 2014, 41(7): 183-189.
- [35] 李笑宇, 林虎, 薛梓, 等. 激光跟踪多边测量自标定优化方法[J]. 仪器仪表学报, 2021, 42(2): 10-17.
- [36] WANG H, CAI Y, LI T, *et al.* Application of genetic algorithm to multilateration measurement of the volumetric error in machine tools[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2016, 8(9): 8.
- [37] SHENG Y, WANG Y, LIU S, *et al.* Large-Scale Measurement Layout Optimization Method Based on Laser Multilateration[J]. *Machines*, 2022, 10(11): 22.
- [38] 梁楚彦, 缪东晶, 李建双, 等. 多边法坐标测量系统关键布局参数对测量精度影响的研究[J]. 计量学报, 2023, 44(7): 1009-1018.
- [39] 谢政委, 林嘉睿, 郑继贵, 等. 基于空间长度约束的坐标控制场精度增强方法[J]. 中国激光, 2015, 42(1): 261-267.
- [40] 郑继辉, 缪东晶, 李建双, 等. 采用标准长度的激光多边法坐标测量系统自标定算法[J]. 计量学报, 2019, 40(1): 64-70.
- [41] LINARES J M, ARROYAVE-TOBON S, PIRES J, *et al.* Effects of number of digits in large-scale multilateration[J]. *Precision Engineering*, 2020, 64: 1-6.
- [42] DENG R, SHI S, YANG L, *et al.* Dynamic measurement method based on temporal-spatial geometry constraint and optimized motion estimation[J]. *Measurement*, 2024, 227: 114269.
- [43] NITSCHKE J, FRANKE M, HAVERKAMP N, *et al.* Six-degree-of-freedom pose estimation with  $\mu\text{m}/\mu\text{rad}$  accuracy based on laser multilateration[J]. *Journal of Sensors and Sensor Systems*, 2021, 10(1): 19-24.
- [44] 缪东晶, 李建双, 郑继辉, 等. 基于多边法的大尺寸位姿测量系统的自标定算法与仿真研究[J]. 计量学报, 2017, 38(S1): 70-75.
- [45] 张帅, 缪东晶, 李建双, 等. 多边法位姿测量系统中跟踪方式对测量精度的影响[J]. 计量学报, 2020, 41(9): 1055-1061.
- [46] WANG J, GUO J, ZHANG G, *et al.* The technical method of geometric error measurement for multi-axis NC machine tool by laser tracker[J]. *Measurement Science and Technology*, 2012, 23(4): 10.
- [47] EZEDINE F, LINARES J-M, SPRAUEL J-M, *et al.* Smart sequential multilateration measurement strategy for volumetric error compensation of an extra-small machine tool[J]. *Precision Engineering*, 2016, 43: 178-186.
- [48] EZEDINE F, LINARES J-M, CHAVES-JACOB J, *et al.* Measurement Parameters Optimized for Sequential Multilateration in Calibrating a Machine Tool with a DOE Method[J]. *Applied Sciences*, 2016, 6(11): 313.
- [49] ZHANG Z J, REN M J, LIU M J, *et al.* A Modified Sequential Multilateration Scheme and its Application in Geometric Error Measurement of Rotary Axis[J]. *Procedia CIRP*, 2015, 27: 313-317.
- [50] LIU X B, XIA Y Q, RUI X T. Uncertainty evaluation of multilateration-based geometric error measurement considering the repeatability of positioning of the machine tool[J]. *Metrology and Measurement Systems*, 2023, 30(1): 49-63.
- [51] HSU C-H, CHEN J-R, HSU F-H, *et al.* A Novel Measurement Method for Determining Geometric Errors of Rotary Tables by Using LaserTRACER and Reflectors[J]. *Applied Sciences*, 2023, 13(4): 8.
- [52] GOMEZ-ACEDO E, OLARRA A, ZUBIETA M, *et al.* Method for measuring thermal distortion in large machine tools by means of laser multilateration[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2015, 80(1-4): 523-534.
- [53] LINARES J-M, CHAVES-JACOB J, SCHWENKE H, *et al.* Impact of measurement procedure when error mapping and compensating a small CNC machine using a multilateration laser interferometer[J]. *Precision Engineering*, 2014, 38(3): 578-588.
- [54] NORMAN J, GIUSCA C, TONNELLIER X. Assessment of a laser-based multilateration system for measurement of low-slope metre-scale surfaces [C]. *Proceedings of the Proceedings of the 2016 International Conference on Laser Metrology and Machine Performance*, 2016.
- [55] 陈佳夷, 王聪, 霍腾飞, 等. 激光跟踪仪检测大口径非球面方法研究[J]. 应用光学, 2021, 42(2): 299-303.
- [56] 王子辰, 张爱梅. 面向特大齿轮的激光跟踪测量精度提升方法[J]. 红外与激光工程, 2021, 50(11): 186-193.
- [57] TANG X, XU K, BI Q, *et al.* Improved closed-loop tracking interferometer measurement for a five-axis machine tool with a bi-rotary milling head[J]. *Science China Technological Sciences*, 2022, 65(5): 1127-1136.

- [2] 李明辉, 郜鲜辉, 吴金金, 等. 电子探针波谱仪和能谱仪在材料分析中的应用及对比 [J]. 电子显微学报, 2020, 39(2): 218-223.
- [3] 伍泳斌, 赵英杰, 王晓娟, 等. 银掺杂氧化亚铜薄膜的制备及其光电性能 [J]. 半导体技术, 2019, 44(4): 291-296,320.
- [4] 郑巧荣. 电子探针能谱矿物定量分析 [J]. 岩矿测试, 1994(2): 105-108.
- [5] Brodusch K. Improvement of the energy resolution of energy dispersive spectrometers (EDS) using Richardson-Lucy deconvolution[J]. *Ultramicroscopy*, 2020, 209: 112886.
- [6] 张冉, 崔磊, 王亚磊, 等. 铝铜薄膜铜元素含量标准物质研究 [J]. 计量科学与技术, 2023, 67(3): 72-79.
- [7] 吴园园, 石丽丽, 张珂. 扫描电镜能谱仪测定不锈钢中镍含量测量结果的不确定度评定 [J]. 冶金分析, 2020, 40(4): 49-53.
- [8] 王雪珂. EDS 分析的若干影响因素研究 [D]. 成都: 电子科技大学, 2017.
- [9] 张素伟, 姚雅萱, 高慧芳, 等. X 射线光电子能谱技术在材料表面分析中的应用 [J]. 计量科学与技术, 2021(1): 40-44.
- [10] Hodoroaba V D, Procop M. A Method to Test the Performance of an Energy-Dispersive X-Ray Spectrometer (EDS)[J]. *Microscopy and Microanalysis*, 2014, 20(5): 1-9.
- [11] Pinard P T, Protheroe A, Holland J, *et al.* Development and validation of standardless and standards-based X-ray microanalysis[J]. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*, 2020, 891: 012020.
- [12] 王松, 高钰涯, 王军, 等. 微区原位元素及同位素分析标准物质研究进展 [J]. 质谱学报, 2021, 42(5): 641-655.
- [13] 祁海, 马冲先, 张培志, 等. 原位微区分析标准样品制备技术的研究进展 [J]. 理化检验 (化学分册), 2020, 56(8): 938-944.
- [14] 陈佳妮. 矿物微区分析中透射电镜测试技术的应用 [J]. 高校地质学报, 2021, 27(3): 356-365.
- [15] 王苗苗, 姚雅萱, 蒲成, 等. 低场核磁共振技术在材料领域的应用 [J]. 计量科学与技术, 2021, 65(1): 50-54,93.
- [16] 雷娜, 王明辉, 杨志权, 等. 制样方法对 IF 钢透射电镜复型样品分析的影响 [J]. 中国检验检测, 2023, 31(1): 24-26.
- [17] 厉艳君, 吴立敏, 周莹, 等. 生物纳米材料透射电镜样品制备条件研究 [J]. 实验室研究与探索, 2021, 40(9): 43-45,56.
- [18] 卢晓华, 汪斌, 周桃庚, 等. 标准物质的定值及均匀性、稳定性评估: JJF 1343-2022 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2022.
- [19] 左晓剑, 赵宜娜, 陈银莉. 电子探针定量分析轴承钢中碳元素的标准样品研制 [J]. 冶金分析, 2023, 43(1): 25-30.
- [20] 王梅玲, 王海, 任丹华, 等. 铜钢镓硒薄膜元素含量的 ICP-OES/ICP-MS 分析 [J]. 计量科学与技术, 2022, 66(12): 11-15,45.
- [21] Morrison C, Sun H, Yao Y, *et al.* Methods for the ICP-OES Analysis of Semiconductor Materials [J]. *Chemistry of Materials* 2020, 32 (5): 1760-1768.
- [22] 李颖, 李本涛, 黄辉, 等. 水中硒成分分析标准物质研制 [J]. *计量科学与技术*, 2021, 65(6): 49-53.
- [23] 李园. ICP-OES 法测定高纯金中银含量的不确定度评定浅析 [J]. *世界有色金属*, 2022(14): 138-141.
- [24] 国家质量监督检验检疫总局. 通用计量术语及定义: JJF 1001-2011[S]. 北京: 中国质检出版社, 2011.
- [25] 国家质量监督检验检疫总局. 测量不确定度评定与表示: JJF 1059.1-2012[S]. 北京: 中国质检出版社, 2012.

本文编辑: 霍炜炜

(上接第 40 页)

- [58] IBARAKI S, KUDO T, YANO T, *et al.* Estimation of three-dimensional volumetric errors of machining centers by a tracking interferometer[J]. *Precision Engineering*, 2015, 39: 179-186.
- [59] CONG H, ZHA J, LI L, *et al.* Accuracy evaluation of geometric error calibration using a laser tracer via a formulaic approach[J]. *Measurement Science and Technology*, 2020, 32(2): 32.
- [60] BOSEMANN W, DAUKE M. Inspection of large CMMs by sequential multilateration using a single laser tracker[J]. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 2003, 1: 44.
- [61] UMETSU K, FURUTNANI R, OSAWA S, *et al.* Geometric calibration of a coordinate measuring machine using a laser tracking system [J]. *Measurement Science and Technology*, 2005, 16(12): 2466: 2472.
- [62] MOUSTAFA S, GERWIEN N, HAERTIG F, *et al.* Comparison of error mapping techniques for coordinate measuring machines using the plate method and laser tracer technique [C]. *Proceedings of the XIX IMEKO World Congress: Fundamental and Applied Metrology*, 2009.
- [63] WENDT K, FRANKE M, HÄRTIG F. Measuring large 3D structures using four portable tracking laser interferometers[J]. *Measurement*, 2012, 45(10): 2339-2345.
- [64] SANTOLARIA J, MAJARENA A C, SAMPER D, *et al.* Articulated arm coordinate measuring machine calibration by laser tracker multilateration[J]. *ScientificWorldJournal*, 2014, 2014: 681853.

本文编辑: 霍炜炜